Ausführlicher Beweis des Kreuzproduktes

Viktor Engelmann

5. Juli 2002

Zusammenfassung

In Büchern über lineare Algebra wird das Kreuzprodukt für gewöhnlich sehr knapp bewiesen, obwohl es als mathematische Pflichtübung gilt. Es werden nur die Kreuzprodukte der Basisvektoren angegeben und dann wird gesagt „wegen der Bilinearität“ kommt keine andere Verknüpfung als

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$$

überhaupt infrage. Für erfahrene Mathematiker mag das offensichtlich sein, aber ein Studienanfänger verzweifelt an dem Argument.

Zuerst fangen auch wir mit den Grundlegenden Eigenschaften des Kreuzproduktes an. Die Kreuzprodukte der Basisvektoren sind

$$\begin{array}{ccccccc} e_1 \times e_1 & = & e_2 \times e_2 & = & e_3 \times e_3 & = & 0 \\ e_1 \times e_2 & = & -(e_2 \times e_1) & = & e_3 & & \\ e_1 \times e_3 & = & -(e_3 \times e_1) & = & e_2 & & \\ e_2 \times e_3 & = & -(e_3 \times e_2) & = & e_1 & & \end{array}$$

Enscheidende Eigenschaften der Bilinearität:

1. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$
2. $(\lambda a) \times b = \lambda(a \times b)$

Fangen wir an mit einem allgemeinen Kreuzprodukt $a \times b$ und zerlegen b in die Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren

$$a \times (b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3)$$

wegen Eigenschaft 1 der Bilinearität ist dies

$$= a \times b_1e_1 + a \times b_2e_2 + a \times b_3e_3$$

Zerlegen wir nun auch alle as in die Darstellung als Linearkombination der Basisvektoren

$$= (a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)\times b_1e_1+(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)\times b_2e_2+(a_1e_1+a_2e_2+a_3e_3)\times b_3e_3$$

Eigenschaft 1 der Bilinearität ergibt

$$
\begin{aligned}
&= a_1e_1 \times b_1e_1 + a_2e_2 \times b_1e_1 + a_3e_3 \times b_1e_1 \\
&\ \ +a_1e_1 \times b_2e_2 + a_2e_2 \times b_2e_2 + a_3e_3 \times b_2e_2 \\
&\ \ +a_1e_1 \times b_3e_3 + a_2e_2 \times b_3e_3 + a_3e_3 \times b_3e_3
\end{aligned}
$$

Eigenschaft 2 der Bilinearität macht daraus

$$
\begin{aligned}
&= a_1b_1(e_1 \times e_1) + a_2b_1(e_2 \times e_1) + a_3b_1(e_3 \times e_1) \\
&\ \ +a_1b_2(e_1 \times e_2) + a_2b_2(e_2 \times e_2) + a_3b_2(e_3 \times e_2) \\
&\ \ +a_1b_3(e_1 \times e_3) + a_2b_3(e_2 \times e_3) + a_3b_3(e_3 \times e_3)
\end{aligned}
$$

setzen wir nun die bekannten Ergebnisse für die Kreuzprodukte der Basisvektoren ein:

$$
\begin{array}{cccccc}
= & a_1b_10 & + & a_2b_1(-e_3) & + & a_3b_1(-e_2) \\
+ & a_1b_2e_3 & + & a_2b_20 & + & a_3b_2(-e_1) \\
+ & a_1b_3e_2 & + & a_2b_3e_1 & + & a_3b_30
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
= & a_2b_2e_1 & + & a_3b_2(-e_1) \\
+ & a_1b_3e_2 & + & a_3b_1(-e_2) \\
+ & a_1b_2e_3 & + & a_2b_1(-e_3)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
= & a_2b_2e_1 & - & a_3b_2e_1 \\
+ & a_1b_3e_2 & - & a_3b_1e_2 \\
+ & a_1b_2e_3 & - & a_2b_1e_3
\end{array}
$$

Eigenschaft 1 der Bilinearität

$$
\begin{aligned}
&= (a_2b_3 - a_3b_2)e_1 + (a_1b_3 - a_3b_1)e_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)e_3 \\
&= \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_1b_3 - a_3b_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

□